ROL EN FUNCTIE VAN HET BEWIJS IN DE DYNAMISCHE MEETKUNDE

[Michael de Villiers]

Inleiding

Dis welbekend onder hoërskool onderwysers dat leerlinge nie spontaan 'n behoefte aan bewysvoering openbaar nie, en word sonder uitsondering in opvoedkundige navorsing ge-identifiseer as 'n belangrike probleem met die onderrig van bewysvoering. Wie het nog nie frustrasie ervaar wanneer gekonfronteer met leerlinge wat vra: 'Waarom moet ons dit bewys?', veral as die resultaat vanselfsprekend voorkom of maklik empiries bevestig kan word.
[Red.: Vanaf hier vervolgen we het artikel in Nederlandse vertaling uit het Engels.]
Volgens Afanassjewa in [7, p. 29] moeten de problemen die leerlingen hebben met bewijzen, niet simpelweg worden toegeschreven aan trage cognitieve ontwikkeling (bijvoorbeeld onvermogen om logisch te redeneren), maar ook aan het feit dat de leerling de *functie (betekenis, doel en nut) van een bewijs niet inziet*.
De eerste vraag is daarom: 'Welke functies heeft een bewijs binnen de wiskunde zelf, die mogelijk gebruikt kunnen worden in de wiskundeles om bewijsvoering tot een zinvollere activiteit te maken?' Het doel van dit artikel is om een aantal belangrijke functies van bewijzen te beschrijven en kort iets te zeggen over sommige implicaties van het leren bewijzen in het kader van de dynamische meetkunde.

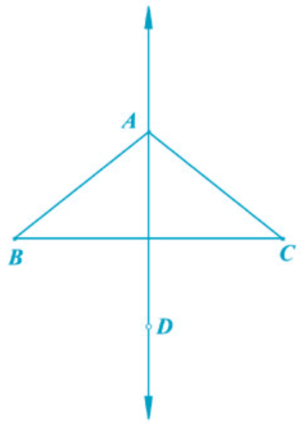
De functies van het bewijs in de wiskunde

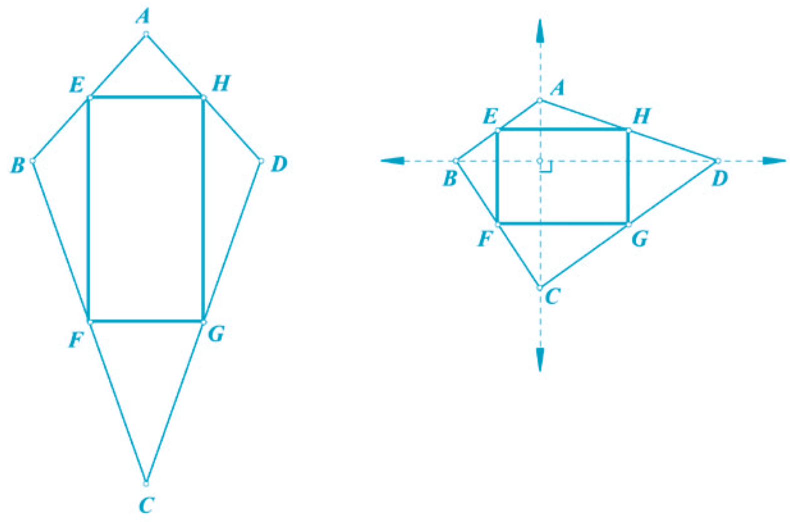
Van oudsher is de functie van het bewijs vrijwel uitsluitend gezien als het *verifiëren* van de juistheid van wiskundige beweringen. Het idee is dat bewijs voornamelijk wordt gebruikt om hetzij eigen twijfel dan wel twijfel van sceptici weg te nemen, een idee dat het onderwijs en vrijwel alle discussie over en onderzoek naar het leren bewijzen eenzijdig heeft gedomineerd.
Maar de visie dat verificatie/overtuiging de belangrijkste functie van bewijzen zou zijn, staat (zoals Bell heeft gesteld in [3, p. 24]) beschouwing van de ware natuur van het bewijs in de weg, omdat overtuiging in de wiskunde vaak wordt verkregen door heel andere middelen dan bestudering van een logisch bewijs. Het bedrijven van modern wiskundig onderzoek vraagt om een completere analyse van de verschillende functies en rollen van het bewijs. Bewijs heeft binnen de wiskunde veel meer functies, die in sommige situaties wezenlijk belangrijker zijn dan alleen maar *verificatie*, bijvoorbeeld:
- *uitleg* (doen inzien waarom iets waar is),
- *ontdekking* (het ontdekken of bedenken van nieuwe resultaten),
- *communicatie* (de sociale uitwisseling van wiskundige kennis en betekenis),
- *systematisering* (verschillende resultaten onderbrengen in een deductief systeem van axioma's, basisconcepten en stellingen).

Elk van deze functies zal hieronder kort worden besproken en toegelicht, in de volgorde die volgens mij ook de beste is om ze bij leerlingen te introduceren.

Bewijs als middel om iets uit te leggen

Vrijwel zonder uitzondering lijken wiskundeleraren te geloven dat alleen *bewijs* een mathematicus zekerheid kan verschaffen, en dus het enige middel is om de juistheid van een hypothese aan te tonen.





FIGUUR 1

FIGUUR 2

Toch is bewijs niet altijd een voorwaarde om ergens van overtuigd te zijn – integendeel, waarschijnlijk is overtuiging veel vaker een voorwaarde voor het zoeken naar een bewijs.
De bekende George Polya (zie [11, pp. 83-84]) schrijft: '… nadat we de stelling in verschillende speciale gevallen hadden geverifieerd, hadden we krachtig inductief bewijs verzameld. De inductieve fase overwon ons aanvankelijk wantrouwen en gaf ons een sterk *vertrouwen* in de stelling. Zonder dat *vertrouwen* zouden we nauwelijks de moed hebben gevonden om af te gaan op een bewijs dat er bepaald niet eenvoudig uitzag. Als je eenmaal zelf overtuigd bent dat een stelling *waar* is, begin je aan het *bewijs*.' (Cursivering later aangebracht.)
In situaties als de bovenstaande, waarbij overtuiging vooraf de motivatie voor het bewijzen is, moet de functie van het bewijs duidelijk iets anders zijn dan verificatie of overtuiging.
In echt wiskundig onderzoek is persoonlijke overtuiging meestal gebaseerd op een combinatie van intuïtie, quasi-empirische verificatie en het bestaan van een logisch (maar niet noodzakelijkerwijs afdoend) bewijs. Zelfs zonder enig bewijs kan soms een zeer hoog overtuigingsniveau worden bereikt.
Een voorbeeld: bij hun discussie over de 'heuristische onderbouwing' voor het nog altijd onbewezen vermoeden van de tweelingpriemgetallen en de beroemde Riemann-hypothese, concluderen Davis en Hersh (zie [4, p. 369]) dat deze onderbouwing *'zo sterk [is], dat hij zelfs zonder afdoend bewijs toch overtuigend is'*.
Bij onderzoek naar de juistheid van een nieuwe, onbekende hypothese zoeken wiskundigen gewoonlijk niet alleen naar bewijzen, maar ze proberen ook tegenvoorbeelden te vinden door middel van quasi-empirische tests, want zulke tests kunnen verborgen tegenspraken, fouten of ongefundeerde aannamen aan het licht brengen. Op die manier worden soms tegenvoorbeelden gevonden die de wiskundige noopt om oude bewijzen te herzien en nieuwe te creëren. Het lijkt erop dat aan het verkrijgen van zekerheid zowel een logische als een psychologische kant zit. De logica vereist een of ander deductief bewijs, maar psychologisch lijken we daarnaast behoefte te hebben aan enig experimenteel onderzoek of intuïtief begrip.

Voorbeelden

De meeste leraren hebben vast wel eens opgemerkt dat leerlingen gefrustreerd kunnen raken als zij een intuïtief vanzelfsprekend resultaat moeten bewijzen (verifiëren), zoals *pons asinorum* ('de basishoeken van een gelijkbenige driehoek zijn gelijk'). Stel dat leerlingen wordt gevraagd om binnen een omgeving als *Cabri* of *Sketchpad* een gelijkbenige driehoek te construeren door spiegeling langs de lijn *AD* (zie figuur 1) en dan de basishoeken te meten. Omdat ze door de figuur te verslepen snel en accuraat een groot aantal gevallen kunnen onderzoeken, is die ervaring doorgaans zeer overtuigend.
Proberen om de leerlingen vervolgens te doordringen van de noodzaak om de juistheid van dit resultaat *aan te tonen*, is niet alleen zinloos, maar naar mijn mening ook een slechte vorm van wiskunde bedrijven. Het gaat hier helemaal niet om het wegnemen van twijfel, maar om duidelijk te maken waarom iets juist is.
In het algemeen moeten volgens mij vlakke meetkundige figuren als drie- en vierhoeken zoveel mogelijk worden benaderd via symmetrie-transformaties. De reden is dat de zo gevonden eigenschappen dan heel makkelijk kunnen worden verklaard, en het niet nodig is om in dit stadium over te gaan tot ingewikkelde congruentie-bewijzen. Ook is aan te bevelen om te proberen in dit stadium het woord *bewijs* geheel te vermijden, en in plaats daarvan de leerlingen om een *logische verklaring* te vragen.
Het volgende is bijvoorbeeld heel bruikbaar: de zijden *AB* en *AC* zijn evenals de hoeken *ABC* en *ACB* gelijk, omdat vouwen (spiegelen) langs de geconstrueerde symmetrieas door *A* (volgens de definitie van symmetrie) *AB* afbeeldt op *AC*, en hoek *ABC* op hoek *ACB*.

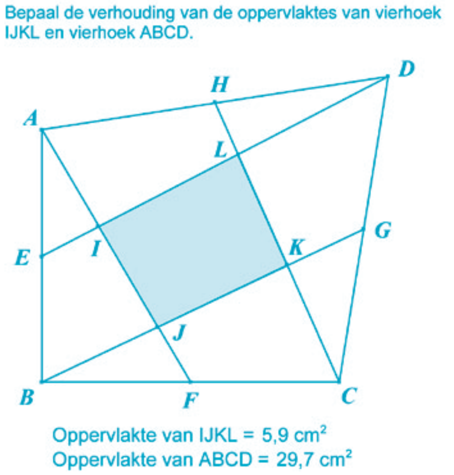
In [6] wordt op dezelfde manier een vlieger geïntroduceerd door spiegeling in de symmetrieas door twee overstaande hoekpunten, waarna de eigenschappen worden onderzocht en logisch verklaard met behulp van die symmetrieas. Op precies dezelfde manier kunnen een gelijkbenig trapezium en een rechthoek worden benaderd (en hun eigenschappen verklaard), via spiegeling in symmetrieassen door twee overstaande zijden, een parallellogram door rotatie van een driehoek over 180 graden om het midden van een der zijden, enz.
Het is op het niveau van eerste kennismaking met meetkundig bewijs ook prima om gewoon een aantal elementaire resultaten als feiten aan te merken, en ze dan te gebruiken om andere, interessantere en spannender resultaten logisch te verklaren.
Zo kan bijvoorbeeld rustig worden aangenomen dat het lijnstuk dat de middens van twee zijden van een driehoek verbindt, evenwijdig is aan de derde zijde, om met behulp daarvan een resultaat aan te tonen dat leerlingen veel meer aanspreekt, namelijk de stelling van Varignon: de middens van de zijden van een vierhoek vormen de hoekpunten van een parallellogram (het zogenoemde Varignon-parallellogram; red.). Je kunt dan altijd later nog een keer op deze aannamen terugkomen, als de leerlingen wat verder zijn en enig begrip en waardering hebben ontwikkeld voor de systematiserende functie van bewijs. Ook historisch gezien is veel meetkundetheorie niet begonnen met het logisch uitwerken van expliciet geformuleerde axioma's en elementaire resultaten tot ingewikkelder resultaten, maar juist andersom: vanuit de ingewikkelde resultaten werden achteraf de onderliggende aannamen en axioma's gereconstrueerd.
Overigens, hoewel het mogelijk is om een grote mate van vertrouwen in de juistheid van een hypothese te kweken door empirische verificatie met de hand of per computer, levert dit geen bevredigende verklaring op voor het waar zijn van de veronderstelling. Het bevestigt alleen maar dát het waar is, en hoewel steeds meer voorbeelden het vertrouwen zullen doen toenemen, geeft het geen psychologisch bevredigend gevoel van inzicht, van begrip hoe of waarom de hypothese het gevolg is van andere, vertrouwde resultaten.
Een veelzeggend resultaat van een studie door Mudaly en De Villiers (zie [10]) was, dat jonge leerlingen geïnteresseerd bleken in een verklaring van (dieper inzicht in) de stelling van Viviani[1], helemaal los van hun behoefte aan overtuiging, die al volledig was bevredigd door onderzoek met dynamische meetkundesoftware. Deze onafhankelijke behoefte aan verklaring kan volgens mij heel effectief worden uitgebuit voor een eerste kennismaking van leerlingen met de waarde van logische redenering (bewijs), zoals uit bovengenoemde voorbeelden mag blijken.

Bewijs als ontdekkingsmechanisme

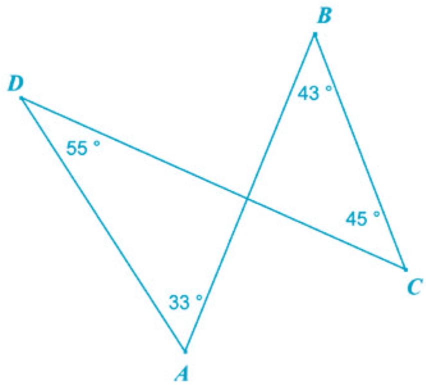
Vaak wordt gezegd dat stellingen meestal eerst worden ontdekt door intuïtie en/of quasi-empirische methodieken, en dan pas worden geverifieerd door middel van bewijzen. Toch zijn er ook talrijke voorbeelden in de geschiedenis van de wiskunde waarbij nieuwe resultaten werden ontdekt of bedacht door pure deductie. Het is zelfs bijzonder onwaarschijnlijk dat sommige resultaten (bijvoorbeeld in de niet-Euclidische meetkunde) ooit zijn begonnen met uitsluitend intuïtie en/of quasi-empirische methodieken. Zelfs binnen de context van formele deductieve processen als axiomatiseren en definiëren, kan bewijs dikwijls tot nieuwe resultaten leiden.
Neem bijvoorbeeld het volgende geval. Stel dat we met *Sketchpad* of *Cabri* een dynamische vlieger hebben geconstrueerd en de middens van de zijden hebben verbonden tot de vierhoek *EFGH*, zoals in figuur 2 (links). Op het oog lijkt *EFGH* duidelijk een rechthoek te zijn, wat door meting van de hoeken makkelijk kan worden geverifieerd. We kunnen nu een willekeurig hoekpunt van de vlieger *ABCD* verslepen en verifiëren dat *EFGH* een rechthoek blijft. We kunnen ook hoekpunt *A* omlaag brengen tot de figuur concaaf wordt om na te gaan of het dan nog steeds waar blijft. Hoewel al die variaties ons makkelijk overtuigen, geven ze geen bevredigende verklaring van het feit dat het Varignon-parallellogram van een vlieger altijd een rechthoek is. Maar als we een deductief bewijs voor deze hypothese geven, merken we onmiddellijk op dat de onderlinge loodrechte stand van de diagonalen het essentiële kenmerk is waarop het bewijs berust, en dat de eigenschap van gelijke aanliggende zijden daarom niet vereist is. (Het bewijs mag de lezer zelf leveren.)
Met andere woorden, we kunnen het resultaat direct generaliseren voor elke vierhoek waarvan de diagonalen loodrecht op elkaar staan, zoals getoond in figuur 2 (rechts). Dit gegeneraliseerde resultaat wordt geenszins gesuggereerd door de pure verificatie van de oorspronkelijke hypothese. Zelfs een systematisch empirisch onderzoek naar verschillende soorten vierhoeken zou waarschijnlijk niet tot het gegeneraliseerde resultaat hebben geleid, omdat we het onderzoek vermoedelijk zouden hebben beperkt tot de bekende vierhoeken als parallellogrammen, rechthoeken, ruiten, vierkanten en gelijkbenige trapezia.

Bewijs als middel tot verificatie (rechtvaardiging)

In verband met de bekende beperkingen van intuïtieve, inductieve of empirische methoden zelf zijn bovenstaande argumenten natuurlijk beslist niet bedoeld om het belang van bewijs als onmisbaar verificatiemiddel te ontkennen, met name als het gaat om verrassende niet-intuïtieve of twijfelachtige resultaten.
Hoewel bij een eerste kennismaking met bewijzen de verificatiefunctie van een bewijs dus niet geschikt is bij het gebruik van dynamische meetkunde, geloof ik zeker dat die later wel degelijk aan de orde kan (en moet) komen om de leerlingen een beter inzicht te geven in de waarde en aard van een deductief bewijs.
Neem het volgende voorbeeld uit [6], dat (naar proefondervindelijk is aangetoond) de boodschap goed aan de leerlingen overbrengt.
De leerlingen krijgen de *Cabri*- of *Sketchpad*-figuur van figuur 3 om de verhouding van de oppervlakten te bepalen, verder onderzoek te doen en dan een hypothese te formuleren. Als opzettelijk (misleidend)



FIGUUR 3



FIGUUR 4

psychologisch element wordt een meetnauwkeurigheid gevraagd van slechts één cijfer achter de komma. Dan zal ongeacht wat de leerlingen aan de vierhoek verslepen, de verhouding telkens 0,2 blijken te zijn. Waarschijnlijk zullen de leerlingen al snel zeggen dat ze 100% zeker van hun zaak zijn. Het zal dan ook een hele schok zijn als hun gevraagd wordt de meetnauwkeurigheid te verhogen en ze dan moeten vaststellen dat na het eerste cijfer achter de komma wel degelijk veranderingen optreden, die alleen door de afronding op 1 decimaal aanvankelijk niet ontdekt werden.
Dit is dus een goed voorbeeld om leerlingen ervan te doordringen dat dynamische meetkundesoftware weliswaar heel nauwkeurig is en buitengewoon bruikbaar voor onderzoek naar de juistheid van schattingen, maar dat je er nog altijd onjuiste inschattingen mee kunt maken als je niet uiterst zorgvuldig te werk gaat. Zelfs als je meet met een nauwkeurigheid van 5 decimalen (het maximaal haalbare bij *Sketchpad*), heb je nog geen absolute zekerheid over het vijfde of zesde (of honderdste!) cijfer achter de komma. Daarom is voor definitieve zekerheid een logisch bewijs nodig, zelfs in een overtuigende omgeving als de dynamische meetkunde.

Bewijs als middel tot communicatie

'… definities worden vaak opgesteld en beargumenteerd als er tegenvoorbeelden worden aangevoerd …' (Lakatos in [9, p. 16])
Neem bijvoorbeeld de volgende opgave uit [6] over de bekende stelling dat de som van de hoeken van een vierhoek altijd 360° is.
Construeer een vierhoek *ABCD* en meet de hoeken. Versleep hoekpunt *D* over de zijde *AB* heen, zodat een figuur ontstaat zoals in figuur 4. Is de som van de binnenhoeken nog altijd 360°? Is *ABCD* nog wel een 'vierhoek'? Wat bedoelen we eigenlijk met 'vierhoek'? Hoe rijm je dit met de hierboven genoemde bekende stelling? Wat zijn eigenlijk *'binnenhoeken'*? Hoe kunnen we de oorspronkelijke stelling herformuleren en hem daarmee 'redden'?

De eerste reactie van de meeste mensen op zo'n 'tegenvoorbeeld' is, om bij de formulering van de stelling dat de som van de hoeken van *elke* vierhoek 360° is, dergelijke '*absurde gevallen*' uit te sluiten. Ze zullen wellicht proberen om een vierhoek zodanig te definiëren, dat dit soort figuren erbuiten valt. Lakatos (in [9], p. 16) beschrijft een soortgelijke situatie waarbij de personages in het boek een tegenvoorbeeld bij de stelling van Euler-Descartes over veelvlakken[2] hebben ontdekt, en er vervolgens een hevige discussie ontstaat over het al dan niet accepteren van dat tegenvoorbeeld. Dit komt omdat verwerping middels een tegenvoorbeeld vaak afhangt van de betekenis van de gehanteerde termen en daarom vaak definities worden voorgesteld en beargumenteerd. Het gaat erom dat in de dynamische geometrie leerlingen al slepende waarschijnlijk wel eens per ongeluk zo'n gekruiste vierhoek zullen construeren, en dan rijst de vraag of dat nu een vierhoek is of niet, en wat we eigenlijk precies bedoelen met een vierhoek. Hoe kunnen we een vierhoek precies definiëren? Wat bedoelen we met *binnenhoeken*? Hoe kunnen we de oorspronkelijke stelling *redden* of *beter formuleren*?

Bewijs als middel tot systematisering

Een bewijs toont het logisch verband tussen beweringen aan op een manier die met quasi-empirisch onderzoek of pure intuïtie niet mogelijk is. Het is daarom een onmisbaar instrument voor het systematiseren van verschillende bekende resultaten tot een deductief systeem van axioma's, definities en stellingen. Enkele belangrijke functies van een deductieve systematisering van bekende resultaten zijn uitgebreid bediscussieerd in [5].
Hoewel bij elke systematisering uiteraard ook elementen van verificatie aan bod komen, is het hoofddoel duidelijk niet *controleren of bepaalde beweringen echt waar zijn*, maar om logisch niet-verwante beweringen waarvan de juistheid al bekend is, onder te brengen in een *samenhangend geheel*. Wegens het algemene overzicht dat een

dergelijke vereenvoudiging en systematisering oplevert, is er natuurlijk ook een uitgesproken element van verduidelijking aanwezig wanneer bewijs wordt gebruikt als middel tot systematisering. In dit geval echter ligt daarbij meer de nadruk op algemene dan op specifieke verduidelijking. Het is daarom in feite misleidend om op school bij het bewijzen van vanzelfsprekende stellingen (zoals 'de overstaande hoeken bij twee snijdende rechten zijn gelijk'), te stellen dat we bezig zijn te '*verifiëren*'. Wiskundigen maken zich in wezen veel minder druk over de juistheid van zulke stellingen, dan over het onderbrengen ervan in een deductief systeem.
In plaats van de leerlingen alleen kant-en-klare definities te geven zouden ze op een bepaald moment ook zelf een aantal wiskundige objecten moeten definiëren, overeenkomstig Freudenthals idee van *lokale axiomatisering*. Stel bijvoorbeeld dat we een formele definitie van een ruit willen geven, dan zouden we met dynamische meetkunde eerst de volgende mogelijkheden van constructie en meting kunnen onderzoeken (zie [8]):
(a) Een ruit is een vierhoek waarin de diagonalen elkaar loodrecht snijden.
(b) Een ruit is een vierhoek waarin de diagonalen elkaar loodrecht snijden en middendoor delen.
(c) Een ruit is een vierhoek met twee paar gelijke aanliggende zijden.
Zo'n empirisch onderzoek toont duidelijk aan dat de eerste en de derde mogelijkheid niet voldoen, maar hoezeer we ook slepen aan een ruit die volgens de specificaties van de tweede mogelijkheid is geconstrueerd, het blijft altijd een ruit. Dit houdt in dat de in (b) gestelde voorwaarden voldoen, en dat die omschrijving dus acceptabel is als officiële definitie, waarmee alle andere eigenschappen van een ruit (bijvoorbeeld 'alle zijden zijn gelijk') als stellingen kunnen worden afgeleid.

Conclusie

Als leerlingen eenmaal een meetkundige hypothese hebben onderzocht met behulp van dynamische software als *Sketchpad* of *Cabri*, hebben ze weinig behoefte meer aan overtuiging of verificatie. Verificatie levert dus weinig of geen motivatie om een bewijs te leveren. Maar het lukt vrij makkelijk om de nieuwsgierigheid van de leerlingen te prikkelen door hen te vragen *waarom* ze denken dat een bepaalde uitspraak waar is, dus ze uit te dagen om het *uit te leggen*. Leerlingen geven doorgaans toe dat inductieve verificatie alleen maar een bevestiging oplevert, geen bevredigend gevoel van inzicht in of begrip van het feit, dat het gaat om een consequentie van andere, bekende resultaten. Ze zijn dan graag bereid om een deductief bewijs niet zozeer te zien als een verificatie, maar als een poging tot verklaring.
Het is ook aan te raden om leerlingen in een vroeg stadium te laten kennismaken met de ontdekkingsfunctie van een bewijs en om aandacht te besteden aan de communicatieve aspecten, door de criteria voor afdoend bewijs met hen te bespreken, de methodiek/heuristiek en de logica waarop het bewijs berust.
De verificatiefunctie van het bewijs moet worden gereserveerd voor resultaten die bij de leerlingen *twijfels* oproepen. De zuivere systematiseringsfunctie van het bewijs komt ten slotte in de echte wiskunde pas in een vergevorderd stadium aan de orde, en moet daarom tot het allerlaatst worden bewaard.

Naschrift

Dit artikel is een aanzienlijk bewerkte en ingekorte versie van het Voorwoord van [6]. De betreffende onderzoeksverslagen, figuren, gemaakt met dynamische meetkundesoftware, en andere bronnen zijn te downloaden van pagina 4 van de homepage van de auteur (*http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/homepage4.html*).

Noten (red.)

[1] Voor een punt binnen een gelijkzijdige driehoek is de som van de afstanden van dat punt tot de zijden van die driehoek gelijk aan de hoogte van die driehoek.
[2] Voor het aantal hoekpunten (H), het aantal ribben (R) en het aantal zijvlakken (Z) van een Platonisch lichaam geldt: $H - R + Z = 2$.

Documentatie

[3] A.W. Bell: A study of pupils' proof-explanations in Mathematical situations. In: Educational Studies in Mathematics, 7 (1976); pp. 23-40.
[4] Ph.J. Davis, R. Hersh: The Mathematical Experience. Groot-Brittannië: Pelican Books (1983).
[5] M. de Villiers: The role of axiomatization in mathematics and mathematics teaching. (RUMEUS Studies in Mathematics Education No. 2). Universiteit van Stellenbosch (1986). (*)
[6] M. de Villiers: Rethinking Proof with Geometer's Sketchpad. Emeryville, Canada: Key Curriculum Press (2003).
[7] H. Freudenthal: Report on Methods of Initiation into Geometry. Groningen: Wolters (1958).
[8] R. Govender, M. de Villiers: Constructive evaluation in a Sketchpad context. In: Proceedings of AMESA 2002 Congress (July 2002). (*)
[9] I. Lakatos: Proofs and Refutations. Cambridge University Press (1976).
[10] V. Mudaly, M. de Villiers: Learners' needs for conviction and explanation within the context of dynamic geometry. In: Pythagoras, 52 (Aug. 2000); pp. 20-23. (*)
[11] G. Polya: Mathematics and Plausible Reasoning. In: Induction and Analogy in Mathematics, Vol 1. Princeton: Princeton University Press (1954).

(*) PDF-bestanden hiervan zijn te downloaden van http://mysite.mweb.co.za/residents/profmd/homepage4.html

Over de auteur

Michael de Villiers is hoogleraar Mathematics Education aan de Universiteit van KwaZulu-Natal, Zuid-Afrika.
E-mailadres: profmd@mweb.co.za
URL: http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/