הוכחה – חשיבה מחדש

מיכאל דה-ויליירס *

עיבוד ותרגום מאנגלית של פרק המבוא לספר: **Rethinking Proof** with **The Geometer's Sketchpad**

מבוא

במאמר של יהודה ראב (Yehuda Rav) שפורסם בשנת 1999 בעיתון העוסק בפילוסופיה של המתמטיקה מתוארת אפשרות של גישה למחשב כל-יכול, המכונה PYTHIAGORA, בעזרתו נוכל לבדוק במהירות האם הנחה מתמטית כלשהי היא נכונה.
האם כלי רב עוצמה מעין זה יביא לקריסתן של הוכחות מתמטיות כפי שאנו מכירים אותן כיום?

ככל שתפתיע את הלא-מתמטיקאים, התשובה לשאלה זו היא "לא" חד משמעי. כפי שמציין ראב, במתמטיקה לעיתים קרובות אין זה רלוונטי כלל האם הנחה כלשהי היא נכונה או לא. כדוגמא, הוא מזכיר את השערת גולדבך (Goldbach) שטרם הוכחה, אך תהליך החיפוש אחר ההוכחה, שימש בעצמו גורם ממריץ למתמטיקאים לפיתוח תיאוריות חדשות חשובות ביותר:

> *שימו לב ל"אוצר" שהתקבל מהניסיונות להוכחת ההשערה של גולדבך, ועד כמה, בהשוואה לאוצר זה, פחותה משמעותו של "ערך האמת" הסופי של ההשערה... וכעת, הבה נניח כי יום אחד ימצא מישהו דוגמא הנוגדת את השערת גולדבך או הוכחה, כי אכן קיימים מספרים שלמים חיוביים זוגיים, שאינם ניתנים לייצוג כסכום של שני מספרים ראשוניים. האם הוכחה או דוגמא מסוג זה, ישללו או אפילו יערערו את כל התיאוריות, המושגים והטכניקות הנפלאים, שפותחו כדי להוכיח את ההשערה שלכאורה אינה נכונה? ממש לא. הפרכת השערת גולדבך תביא בעקבותיה מספר רב של פיתוחים חדשים, בלי להשפיע כהוא זה על השיטות שפותחו עד אז בניסיון להוכיח את ההשערה. שכן, מיד תועלנה שאלות חדשות, כגון מהו מספר המספרים השלמים "שאינם-גולדבכיים": האם הם רבים אך ניתנים לספירה? או שמא רבים מספור?..*
> *אזי נוכל לאגור אוצרות חדשים בצד, ולא במקום האוצרות הישנים – כי זו דרכן של ההוכחות במתמטיקה!*

בהמשך מדגיש ראב, כי למעשה ההוכחות, ולא המשפטים, הן הן נשאי הידע המתמטי:

> *במובן מסוים משפטים הם רק: תגים, תוויות להוכחות, סיכומי ידע, כותרות של חדשות וכלי עריכה. מכלול "מחסן הנשק" של המתמטיקה - המתודולוגיות, המושגים, האסטרטגיות והטכניקות המשמשים לפתרון בעיות, קביעת קשרים בין תיאוריות וסידור שיטתי של התוצאות - כל הידע המתמטי כולו טמון בהוכחות... דמיינו לעצמכם את ההוכחות כרשת של דרכים במערכת תחבורה ציבורית, והתייחסו אל ניסוח משפטים כאל תחנות אוטובוס; מיקום התחנות, הוא עניין של נוחות ותו לא.*

ברוח דומה לדברים אלה, התייחס המתמטיקאי ג'אן-קרלו רוטה (Rota, p. 190) אל ההוכחה של המשפט האחרון של פרמה (Fermat), כאשר קבע, כי ערכה של ההוכחה עולה בהרבה על אישור גרידא של התוצאה:

> *הערך האמיתי של מה שעשו ווילס (Wiles) ושותפיו עולה בהרבה על סתם הוכחה של סברה גחמנית. החשוב בהוכחת המשפט*

תרגום: סוזי שפירא; עיבוד: צוות "קשר חם"

האחרון של פרמה הוא פתיחתן של אפשרויות חדשות בפני המתמטיקה הערך של הוכחת ווילס אינו טמון במה שהיא מוכיחה, אלא במה שהיא פותחת, בדברים אותם היא מאפשרת.

מהאמור לעיל עולים שני רעיונות חשובים: ראשית, ההוכחות הן חלק בלתי נפרד מהידע המתמטי, ושנית, ערכן עולה בהרבה על ערכו של אימות סתמי של תוצאות. הרעיון הראשון פעל כמניע חשוב לכתיבת ספר זה, במיוחד לאור הגישה המוטעית אולי, לפיה יישומי מחשב חדשים ורבי עוצמה, כמו ה- Sketchpad[1], מבטלים את הצורך בהוכחות. אמנם כלים אלה מאפשרים לנו להשתכנע באמצעות המחשה ויזואלית או מדידות אמפיריות, אך הוכחות עדיין חשובות כתמיד. הרעיון השני מרמז על ערכן העצום של ההוכחות, משום שהן יכולות לספק תובנות, להוביל לגילויים חדשים ואף לסייע ביצירת שיטתיות. הרעיונות המרכזיים סביבם מאורגן ספר זה, הם התפקידים הרבים של ההוכחות. במובנים רבים, ספר זה מהווה סטייה משמעותית מהגישות המסורתיות להוכחות, אשר התמקדו בתפקיד האימות שממלאת ההוכחה. במקום זאת, בפרק הראשון של הספר מוצגת ההוכחה כאמצעי להסברת תוצאות אשר כבר אושרו ניסיונית באמצעות הלומדה. הפרקים הבאים מאירים את תפקידיה השונים של ההוכחה: גילוי, אימות, אתגר וסיוע ליצירת שיטתיות. תפקידים אלה של ההוכחות זוכים לדיון מעמיק יותר בפרק 'תפקיד ההוכחה בעזרת Sketchpad'. מומלץ לקרוא פרק זה כרקע לפעילויות המבוצעות.

תפקיד ההוכחה בסביבת לומדה

הקושי של תלמידים בהבנת הצורך בהוכחה מוכר היטב לכל המורים בבתי הספר התיכוניים, והוא מזוהה, ללא יוצא מהכלל, בכל המחקר החינוכי כבעיה מרכזית בהוראת ההוכחה. מי לא חווה עד היום את התסכול הנובע מעמידה מול התלמידים השואלים "מדוע עלינו להוכיח זאת?" גונובולין (Gonobolin, 1954, p. 61) מדגים במסקנתו את הבעייתיות:

התלמידים.. אינם... מזהים את הצורך בהוכחה לוגית של המשפטים הגיאומטריים, במיוחד כאשר הוכחות אלה נראות כמובנות מאליהן או שניתן לבססן בקלות בצורה אמפירית.

אפנייבה (Freudenthal, 1958, p. 29) טוען, שאין לייחס את הקושי של תלמידים בנוגע להוכחות רק לבעיה של התפתחות קוגניטיבית איטית (למשל: חוסר יכולת לחשיבה לוגית), אלא גם לעובדה שתלמידים אינם מזהים את תפקיד (משמעות, מטרה ותועלת) ההוכחה. למעשה, מספר מחקרים חדשים המתנגדים לפיאז'ה הוכיחו כי ילדים צעירים מאד מסוגלים לנמק באופן לוגי במצבים מציאותיים ומשמעותיים עבורם.
(Donaldson, 1979 ; Hewson, 1977 ; Wallingtgon, 1974 ; Wason and Johnson-Laird, 1972)
זאת ועוד, בניסיונות של חוקרים ללמד לוגיקה, לעיתים קרובות לא התקבלו הבדלים משמעותיים סטטיסטית בתפקודם של התלמידים ובהערכתם את ההוכחות (Mueller, 1975 ; Walter, 1972 ; Deer, 1969). יותר מכל דבר אחר, דומה שהנושא העקרוני ביותר העומד על הפרק הוא ההנעה המתאימה, אותה מספקים התפקידים השונים של ההוכחה לגבי התלמידים.

אך עדיין נשאלת השאלה: "אלו תפקידים יש להוכחה בתוך המתמטיקה עצמה, תפקידים שניתן לנצל בתוך כיתת הלימוד, כדי להפוך את ההוכחה לפעילות משמעותית יותר?" מטרת הפרק הנוכחי היא לתאר כמה תפקידים חשובים של ההוכחה, ולדון בקצרה בחלק מההשלכות שלהן על הוראת ההוכחה.

תפקידי ההוכחה במתמטיקה

התפקיד המסורתי של ההוכחה היה כמעט אך ורק אימות נכונותן של הצהרות מתמטיות. הרעיון שהינחה מסורת זו הוא שההוכחה משמשת בעיקר כדי להסיר את הספקות האישיים או את אלה של הספקנים. רעיון זה שלט ללא עוררין בעולם ההוראה וברוב הדיונים והמחקרים שעסקו בהוראת ההוכחה. למשל, לפי קליין (Kline, 1944, p. 318):

*הוכחה היא בעלת משמעות רק כאשר היא עונה על **ספקותיו** של התלמיד, כאשר היא מוכיחה מה שאינו ברור מאליו (ההדגשה – הוספה)*

(Kline, 1973, p. 131).

*הצורך, בהוכחה והפונקציונליות שלה, יכולים לעלות רק במצבים בהם התלמידים פוגשים **באי***

[1] Sketchpad היא לומדה פתוחה בתחום הגיאומטריה שפותחה ע"י – Key Curriculum Press 2

>***וודאות*** *לגבי האמת של טענות מתמטיות.*
>*(ההדגשה-הוספה)*. (Alibert, 1988, p. 31).

חנה (Hanna, 1989) וולמינק (Volmink, 1990) מגדירים גם הם את ההוכחה רק במונחים של תפקיד האימות שבה:

>*הוכחה היא טיעון הנחוץ כדי* ***לאמת*** *טענה, טיעון היכול להופיע בכמה צורות שונות, כל עוד הוא משכנע. (ההדגשה-הוספה)* (1989, p. 20)
>*"מדוע טורחים אנו להוכיח משפטים? אני מעלה כאן את הטענה שהתשובה היא כדי לשכנע אנשים (כולל את עצמנו)... אנו עשויים לקבל הוכחה* ***כטיעון המספיק כדי לשכנע את מי שספקותיו מתקבלים על הדעת****". (ההדגשה-הוספה).*
>(Volmink, p. 8-10)

למרות שמחברים רבים (לדוגמא Van Dormolen, 1977 ; Van Hiele, 1973 ; Freudenthal, 1973 ואחרים) טענו כי הצורך שלנו בקפדנות דדוקטיבית עשוי לעבור שינויים ולהפוך עם הזמן למתוחכם יותר, הרי שגם טיעון זה נטען מנקודת ההשקפה לפיה התפקיד של ההוכחה הוא בעיקר האימות. למשל:

>*... כדי להתקדם בקפדנות, הצעד הראשון הוא להטיל* ***ספק*** *בקפדנות שמאמינים בה ברגע זה. ללא* ***ספק*** *זה, לא נוצרת אפשרות להתיר לאחרים להכתיב לנו אמות מידה חדשות של קפדנות.*
>*(ההדגשה-הוספה)* (Freudenthal, 1973, p. 151).

מחברים רבים אף הציעו שלבים מוגדרים בהתפתחות הקפדנות. (Tell, 1989, p. 30) למשל, מציע שלושה שלבים של הצבת טיעון משכנע, והם: שכנוע עצמי, שכנוע ידיד ושכנוע אויב. למרות שאלו הן הבחנות שימושיות ביותר, הרי שהן מתייחסות רק לפונקציית האימות של ההוכחה.

עם זאת, כפי שציין בל (Bell, 1976, p. 24) גישה זו הרואה באימות/שכנוע את התפקיד העיקרי של ההוכחה "נמנעת מבחינת האופי האמיתי של ההוכחה", משום שבמתמטיקה השכנוע מושג לעיתים קרובות "באמצעים שונים לגמרי מאשר הליכה בעקבות הוכחה לוגית". משום כך, המחקר המתמטי המודרני המעשי, דורש ניתוח שלם יותר של תפקידי ההוכחה. איני מתיימר לשלמות או לבלעדיות, אך במחקריי בשנים האחרונות, התגלה הדגם המוצע של תפקיד ההוכחה כשימושי. זוהי הרחבה קלה של ההבחנות המקוריות של בל (Bell, 1976) בין התפקידים של האימות, ההארה, ויצירת השיטתיות. הדגם מוצג ונדון כאן (ללא חשיבות לסדר):

- אימות (עיסוק באמיתות המשפט);
- הסבר (בניית תובנה באשר לסיבות לנכונותו);
- יצירת שיטתיות (ארגון תוצאות רבות לכדי מערכת דדוקטיבית של אקסיומות, מושגים עיקריים ומשפטים);
- גילוי (גילוי או המצאת תוצאות חדשות);
- תקשורת (העברת ידע מתמטי);
- אתגר אינטלקטואלי (ההישג/הסיפוק האישי).

הוכחה כאמצעי לאימות/שכנוע

דומה שמורים למתמטיקה, כמעט ללא יוצאים מהכלל, מאמינים כי רק הוכחה מעניקה וודאות למתמטיקאי, וכי משום כך, זוהי הסמכות היחידה לקביעת נכונותה של השערה. אך הוכחה איננה בהכרח דרישה מוקדמת לשכנוע – להיפך, שכנוע הוא לעיתים קרובות הדרישה המוקדמת למציאת הוכחה. (שכן, מאילו סיבות אחרות, שונות ומשונות, נהיה מוכנים להקדיש זמן רב, בחיפוש הוכחות להשערות מסוימות, אם אין אנו משוכנעים באמיתותן?)

פויה (Polya, 1954, p. 83-84) כותב:

>*... אחרי שאימתנו את המשפט בכמה מקרים מסוימים, אספנו עדויות אינדוקטיביות רבות-עוצמה לנכונותו. השלב האינדוקטיבי גבר על החשדנות ההתחלתית שלנו, והעניק לנו* ***בטחון*** *בנכונות המשפט. בלי* ***בטחון*** *זה, לא היינו יכולים למצוא את האומץ לנסות להתמודד עם ההוכחה, שלא נראתה כלל כעבודה שגרתית. לאחר שהינך משכנע את עצמך שהמשפט* ***נכון****, אתה מתחיל* ***להוכיח*** *אותו. (ההדגשה הוספה).*

במצבים כמו זה שתואר לעיל, בהם השכנוע, הקודם להוכחה, מעניק את ההנעה לחפש הוכחה, להוכחה חייב בברור להיות תפקיד נוסף לאימות/שכנוע.

במחקר מתמטי, השכנוע האישי הוא לרוב פרי שילוב של אינטואיציה, אימות אמפירי-למחצה ומציאת הוכחה לוגית (אך לא בהכרח קפדנית). למעשה, ניתן לפעמים להגיע לרמה גבוהה מאד של שכנוע גם בהעדר הוכחה. כאשר דיוויס והרש (Davis & Hersh, p. 369)

דנים ב״עדות ההויריסטית״ התומכת בהשערה על זוגות תאומים של מספרים ראשוניים, שעדיין לא הוכחה, ובהשערת רימן (Rriemann) המפורסמת, הם מגיעים למסקנה כי העדות *״כה חזקה, עד שהיא נושאת עמה שכנוע גם ללא הוכחה קפדנית״*.

שכנוע מתמטיקאים אינו מושג בעזרת הוכחה בלבד. עובדה זו הוכיח גם עורך לשעבר של העיתון-Mathematical Reviews, שהעיר, כי כמחצית מההוכחות שפורסמו בעיתון, לא היו שלמות או שהכילו טעויות, למרות שהמשפטים אליהם התייחסו ההוכחות היו בעיקרם נכונים (Hanna, 1983, p. 71). מתמטיקאים לדוגמא, רק לעיתים רחוקות בודקים לעומק ולפרטי פרטים הוכחות שפורסמו. הם בוחרים במקום זאת, להישען על סמכות המחבר, על בדיקת מקרים מסוימים ועל הערכה לא רשמית של בדיקה האם *״השיטות והתוצאות מתאימות, נראות הגיוניות...״* (Davis & Hersh, 1986, p. 67).

לטענת חנה (Hanna, 1989) יש קדימות לסבירות גבוהה של תוצאות על-פני קיומה של הוכחה קפדנית ומוצקה.

בדרך כלל, כאשר מתמטיקאים חוקרים את אמיתותה של השערה חדשה ולא ידועה, הם אינם מחפשים רק הוכחות, אלא מנסים בו-זמנית לבנות דוגמאות נגדיות באמצעות בדיקה אמפירית-למחצה, מאחר ובדיקה כזאת עשויה לחשוף סתירות פנימיות, טעויות או הנחות סמויות. באופן זה, נוצרות לפעמים דוגמאות נגדיות הדורשות מהמתמטיקאים לשנות הוכחות קיימות ולבנות הוכחות חדשות. בתהליך ההשתכנעות, יש אותה חשיבות לחוסר היכולת להפריך הנחות באופן אמפירי ולתהליך של הצדקה דדוקטיבית. דומה כי להשגת וודאות יש מימד לוגי לא פחות מאשר מימד פסיכולוגי. מההיבט הלוגי – אנו דורשים הוכחה דדוקטיבית כלשהי; פסיכולוגית, נדמה שאנו זקוקים גם לבדיקה ניסיונית כלשהי או להבנה אינטואיטיבית.

בשל המגבלות המוכרות של אינטואיציה ושל שיטות אמפיריות-למחצה, ברור מאליו כי אין בכוונת הטיעונים שלעיל להפחית מחשיבותה של ההוכחה כאמצעי חסר-תחליף לאימות, במיוחד במקרים בהם מופיעות תוצאות מפתיעות, שאינן אינטואיטיביות או שהן מוטלות בספק. הכוונה היא להציב את ההוכחה בפרספקטיבה נכונה יותר, בניגוד לאידיאליזציה מסלפת של ההוכחה, כאמצעי היחיד (והמוחלט) של אימות/שכנוע.

הוכחה כאמצעי להסבר

למרות שניתן להשיג רמה גבוהה למדי של ביטחון בנכונות של השערה באמצעות אימות אמפירי-למחצה (למשל, בניות ומדידות מדויקות, הצבת מספרים, וכדומה); אימות כזה אינו מספק הסבר הולם לשאלה מדוע ההשערה עשויה להיות נכונה, הוא רק מאשש אותה; בדיקת דוגמאות נוספות עשויה להגביר את הביטחון אף יותר, אך אין היא מעניקה את התחושה הפסיכולוגית הנוחה של הארה – אין בה תובנה או הבנה פנימית כיצד ההשערה נובעת מתוך תוצאות מוכרות אחרות. למשל, למרות העדויות ההויריסטיות המשכנעות התומכות בהשערת ריימן, שהוזכרה לעיל, עדיין יכול להיות צורך דוחק בהסבר, כפי שציינו זאת דייוס והרש (Davis & Hersh, 1983, p. 368):

> *בהקשר כמו זה מעניין לשאול, מדוע אנו חשים עדיין את הצורך בהוכחה. דומה כי ברור שאנו רוצים בהוכחה משום. שאם משהו הוא נכון ואיננו יכולים להסיק אותו באופן זה, הרי שזהו סימן לחוסר הבנה מצדנו. במילים אחרות, אנו מאמינים, כי הוכחה תהיה דרך להבין מדוע השערת רימן היא נכונה, ויש בכך יותר מאשר רק לדעת כי אכן היא נכונה, מתוך הנמקה הויריסטית משכנעת.*

גם גייל (Gale, 1990, p. 4) כשהוא מתייחס לתגליות הניסיוניות של פייגנבאום (Feigenbaum) בגאומטריה של פרקטלים, מדגיש כי להוכחות שלהן, היה בסופו של דבר, תפקיד של הסבר, ולא של אימות:

> *לנפורד (Lanford) ומתמטיקאים אחרים לא ניסו **לתת תוקף** לתוצאות של פייגנבאום יותר משניסה ניוטון לתת **תוקף** לגילויים של קפלר על מסלולי כוכבי הלכת. בשני המקרים תוקפן של התוצאות לא היה מעולם מוטל בספק. מה שהיה חסר היה **ההסבר** מדוע המסלולים של כוכבי הלכת אליפטיים? מדוע קיימים יחסים מיוחדים אלה?... יש הבדל עצום בין אימות להסבר. (ההדגשות-הוספו).*

ברוב המקרים, כאשר התוצאות בהן דנים הן מובנות מאליהן באופן אינטואיטיבי ו/או שהן נתמכות בעדויות משכנעות אמפיריות-למחצה, תפקיד ההוכחה עבור המתמטיקאים אינו תפקיד של אימות, אלא של הסבר

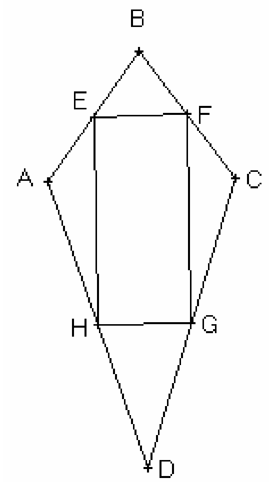
(או אחד התפקידים האחרים של ההוכחות, המתוארים בהמשך).

למעשה, עבור מתמטיקאים רבים, להיבט ההסבר של ההוכחה יש חשיבות גדולה יותר מאשר להיבט של האימות. למשל, פאול הלמוש (Paul Halmos) הנודע הצהיר לפני זמן מה, כי למרות שההוכחה בעזרת מחשב של משפט ארבעת הצבעים על-ידי אפל והיקן (Appel & Haken), שכנעה אותו כי המשפט נכון, הרי שהוא אישית עדיין היה מעדיף הוכחה שתעניק גם "הבנה" (Albers, 1982, p. 239-240).
מנין (Manin, 1981, p. 107) ובל (Bell, 1976, p. 24) האמינו גם הם כי הסבר הוא אמת מידה להוכחה 'טובה' כאשר הצהירו, בהתאמה, כי היא "אחת שעושה אותנו" יותר חכמים, וכי מצופה ממנה "שתעניק לנו תובנה מדוע הטענה היא נכונה".

הוכחה כאמצעי לגילוי

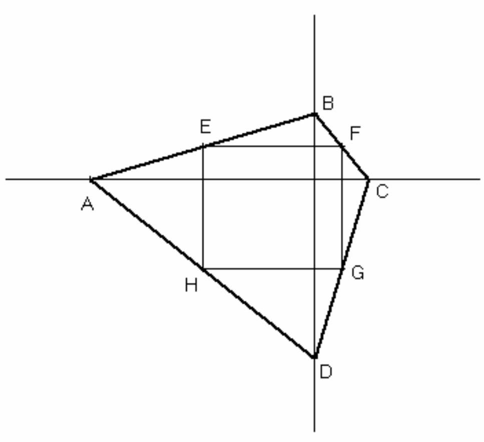
נהוג לומר, כי ברוב המקרים, משפטים מתגלים באמצעות אינטואיציה ו/או שיטות אמפיריות-למחצה, לפני שהם מאומתים באמצעות הוכחות. אולם, בהיסטוריה של המתמטיקה שזורות דוגמאות רבות של תוצאות חדשות שהתגלו או הומצאו באופן דדוקטיבי טהור. למעשה, אין זה סביר לחלוטין שלתוצאות מסוימות (למשל, גיאומטריות לא-אויקלידיות) היה סיכוי כלשהו להתגלות רק בדרך של אינטואיציה ו/או על ידי שימוש בשיטות אמפיריות-למחצה. אפילו בהקשר של תהליכים דדוקטיביים פורמליים כל כך, כמו אקסיומטיזציה והגדרה, לעיתים קרובות יכולה ההוכחה להוביל לתוצאות חדשות. למתמטיקאי, ההוכחה היא משום כך לא רק אמצעי לאימות תוצאה שכבר התגלתה, אלא לעיתים קרובות גם אמצעי לחקר, ניתוח, גילוי והמצאת תוצאות חדשות (השווה Schoenfeld et al, 1986 ; De Jager, 1990).

נתייחס למשל לדוגמא הבאה: נניח שבנינו דלתון דינמי בעזרת לומדה מתאימה וחיברנו את נקודות האמצע של הצלעות, כמוצג להלן, כדי ליצור מרובע EFGH. מבחינה חזותית, נראה EFGH כמלבן, מה שניתן לאישור בקלות על ידי מדידת הזוויות. נבחר קודקוד כלשהו של הדלתון ABCD, ונגרור אותו למקום חדש, כדי לוודא ש-EFGH נותר מלבן. נוכל גם לגרור את קודקוד A, עד למצב בו המצולע ABCD הופך קעור, כדי לבדוק האם ההשערה נותרת נכונה. למרות ששינויים רציפים אלה יכולים לשכנע אותנו בקלות, הרי שהם אינם מספקים הסבר מניח את הדעת, מדוע המרובע שקדקודיו הם נקודות האמצע של צלעות דלתון, הוא מלבן. אם נבנה הוכחה דדוקטיבית להשערה זו, נשים לב מיד כי הניצבות של האלכסונים היא התכונה העיקרית עליה נשענת ההשערה, וכי שוויון צלעות סמוכות אינו תנאי הכרחי במשפט.



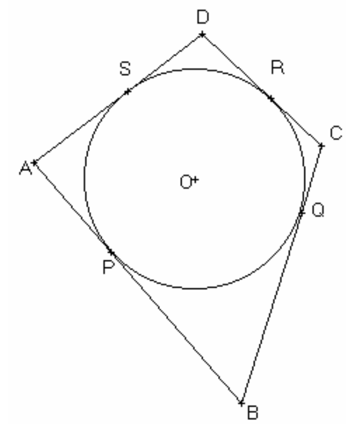
שרטוט 1

במילים אחרות, נוכל מייד להכליל את התוצאות לכל מרובע שאלכסוניו מאונכים, כפי שמוצג בשרטוט 2. תוצאה כללית זו אינה עולה בהכרח מהאימות האמפירי הטהור של ההשערה המקורית. סביר להניח כי גם חקירה שיטתית אמפירית של סוגים שונים של מרובעים, לא הייתה מסייעת לגלות את המקרה הכללי, כי יש לשער שהיינו מגבילים את החקירה שלנו למרובעים המוכרים: מקביליות, מלבנים, מעוינים, ריבועים וטרפזים שווי-שוקיים.



שרטוט 2

המשפט של ציבה (Cava, 1678), התגלה כנראה באופן דדוקטיבי בדרך דומה, על-ידי הכללת הוכחה לקיום נקודת החיתוך של שלושת התיכונים במשולש, ולא על-ידי בנייה ומדידה (ר' De Villliers, 1988). עם זאת, ניתן לגלות תוצאות חדשות גם *א-פריורי*, על-ידי ניתוח דדוקטיבי של תכונות של עצמים ידועים. בשרטוט 3 לדוגמה, ניתן להסיק במהירות וללא מדידה כי במרובע ABCD החוסם מעגל, AB+CD=BC+DA תוך שימוש במשפט לפיו קטעי המשיקים למעגל מנקודה חיצונית לו, שווים באורכם.



שרטוט 3

הוכחה כאמצעי ליצירת שיטתיות

הוכחות חושפות יחסים לוגיים החבויים הקושרים בין טענות. חשיפה זו איננה ניתנת להשגה על-ידי בדיקות אמפיריות או באמצעות אינטואיציה טהורה. משום כך, הוכחה היא כלי חיוני להפיכת תוצאות ידועות למערכת שיטתית של אקסיומות, הגדרות ומשפטים. להלן כמה מהתפקידים החשובים ביותר של יצירת שיטתיות דדוקטיבית של תוצאות ידועות, כפי שהוגדרו על-ידי דה-ויליירס (De Villiers, 1986):

- עזרה בזיהוי של: חוסר עקביות, טיעונים מעגליים, והנחות חבויות או הנחות שלא בוטאו במפורש.
- איחוד ופישוט תיאוריות מתמטיות באמצעות שילוב של טענות, משפטים ומושגים, ובכך הובלה להצגה חסכונית של תוצאות.
- בניית התייחסות כוללת יעילה של נושא, תוך חשיפת המבנה האקסיומטי החבוי בו, ממנו נובעות כל התכונות האחרות.
- יישום, הן בתוך המתמטיקה והן מחוצה לה, מאחר וניתן לבדוק את מידת היישום של מבנה שלם או של תיאוריה שלמה, רק על-ידי הערכת ההתאמה של האקסיומות וההגדרות שלהם.
- הכוונה לבניית מערכות דדוקטיביות אלטרנטיביות, המספקות נקודות ראיה חדשות ו/או מערכות חסכוניות, אלגנטיות ורבות עוצמה יותר מאשר אלו הקיימות.

מרכיב האימות קיים גם כאן אך ברור שהמטרה המרכזית אינה "לבדוק האם טענות מסויימות הן נכונות", אלא לארגן אותן לכלל *שלמות אחידה ובעלת עקביות*. בנוסף לנקודת הראייה הגלובלית המתקבלת כתוצאה מהפישוט והאיחוד כאמור לעיל, קיים כמובן גם גורם של הארה כשמשתמשים בהוכחות כאמצעי ליצירת שיטתיות. אך במקרה זה הדגש הוא על ההארה הגלובלית, ולא על זו הלוקלית. לכן במהלך הוכחת טענות ברורות מאליהן, כגון הטענה על שוויון זויות קדקודיות, תפקיד ההוכחה הוא בניית קשרים עם גוף הידע ולא אימות הטענה. למעשה, המתמטיקאים מעוניינים יותר באירגון של משפטים לכדי מערכת דדוקטיבית, מאשר באמת שלהם.

הוכחה כאמצעי לתקשורת

כמה מחברים הדגישו את חשיבות התפקיד התקשורתי של ההוכחות, לדוגמא:

> *... דומה כי הוכחה היא אופן של **שיח**, אמצעי של תקשורת בין אנשים העוסקים במתמטיקה. (ההדגשה-הוספה)* (Volmink, 1990, p. 8).

> *... אנו מודעים לכך שטיעון מתמטי מיועד לקהל אנושי, שהוא בעל ידע קודם המאפשר לו להבין את כוונות הדובר או המחבר. מקביעתנו כי הטיעון המתמטי אינו טכני או פורמלי, משתמע מה אנו קובעים לגביו... זהו למעשה, **שיח ושיג אנושי**, המבוסס על משמעויות משותפות, שלא כולן מילוליות או מנוסחות בשפה מתמטית. (ההדגשה-הוספה)* (Davis & Hersh, 1986, p. 73).

באופן דומה, הזכיר דייוויס (Davis, 1976) גם כי אחד הערכים האמיתיים של הוכחה הוא יצירת פורום לדיון ביקורתי. בהתאם לגישה זו, ההוכחה היא דרך ייחודית להעברת תוצאות מתמטיות בין מתמטיקאים מקצועיים, בין מורים לתלמידים, ובין התלמידים לבין עצמם. הדגש כאן הוא על התהליך החברתי של דיווח והפצת הידע המתמטי בחברה. הוכחות כדרך

אינטראקציה חברתית, מערבות גם משא ומתן, לא רק במשמעות של המושגים הנדונים, אלא באופן סמוי, גם בקריטריונים לקבלת טיעון. זיקוק חברתי כזה של הוכחה תוך כדי דיונים, תורם לעידון שלה ולזיהוי טעויות, כמו גם לעיתים להפרכת ההוכחה על-ידי גילוי דוגמא נגדית.

הוכחה כאמצעי לאתגר אינטלקטואלי

למתמטיקאים, הוכחה מהווה אתגר אינטלקטואלי, אליו הם נמשכים כמו שאנשים אחרים נמשכים לפתרון תשבצים או לתחביבים ועיסוקים יצירתיים אחרים. רוב האנשים חוו חוויה כזאת, ולו רק במציאת פתרון מוצלח של תשבץ או פאזל, כך שהם יכולים להבין את התרוממות הרוח שחשו כנראה פיתגורס וארכימדס כשגילו את ההוכחות שלהם. ניתן להשוות בניית הוכחות לאתגר הפיזי של ריצת מרתון או טריאתלון מפרכים, ולסיפוק המגיע בסיומם. במובן זה, להוכחה יש תפקיד של *הגשמה עצמית*. לכן, ההוכחה היא מעבדת ניסוי לכושר העמידה ולכושר ההמצאה האינטלקטואלי של המתמטיקאי (Davis & Hersh, 1983, p. 369) ובגירסה חופשית של תשובתו המפורסמת של הילרי כשנשאל מדוע טיפס על הר האוורסט: *"אנו מוכיחים את התוצאות שלנו, משום שהן שם"*. ואם נרחיק לכת עוד יותר עם השוואה זו: לעיתים קרובות אין זה קיום ההר (נכונות התוצאה) מוטל בספק אלא האם (וכיצד) ניתן לכבוש אותו (להוכיח אותה)!

ולבסוף, למרות שניתן להבחין בשישה תפקידים של הוכחה השונים זה מזה, שהוזכרו לעיל, הרי שלעיתים קרובות הם שלובים זה בזה. בכמה מקרים, עשוי תפקיד אחד לקבל חשיבות עליונה, ובמקרים אחרים לתפקידים מסוימים, אין כלל מקום. בנוסף לכך, רשימת תפקידים זו אינה שלמה כלל ועיקר. לדוגמה, נוכל בקלות להוסיף לרשימה תפקיד אסתטי או תפקיד של שינון ופיתוח אלגוריתמים (Van Asch, 1993; Renz, 1981).

הוראת הוכחות בעזרת לומדה

אחרי שתלמידים חקרו ביסודיות השערה בגיאומטריה, באמצעות השתנות רציפה בלומדה דינמית, יש להם צורך מועט בשכנוע או באימות נוספים. לכן האימות אינו מהווה הנעה לחיפוש הוכחה. עם זאת, גיליתי כי יחסית קל לעורר סקרנות נוספת כששואלים את התלמידים מדוע הם חושבים שתוצאה מסוימת היא נכונה; שאלה כזו מעמידה בפני התלמידים אתגר לנסות ולהסביר את התוצאה. די מהר, תלמידים מודים כי אימות אינדוקטיבי רק מאשר, אך אינו מעניק הארה, תובנה או הבנה פנימית לדרך שבה ההשערה נובעת מתוצאות קודמות מוכרות. משום כך, תלמידים שבעי רצון כאשר מוצג בפניהם טיעון דדוקטיבי, כניסיון להסבר במקום אימות.

הסבר

↓

גילוי

↓

אימות

↓

אתגר אינטלקטואלי

↓

שיטתיות

מומלץ להציג בפני התלמידים בשלב מוקדם גם את תפקיד הגילוי של ההוכחות, ולהקדיש תשומת לב לאספקטים התקשורתיים, תוך כדי דיון איתם, לגבי הקריטריונים לקבלת ראיות, ההויריסטיקה וההיבטים הלוגיים החבויים בהוכחות. תפקיד האימות של ההוכחות צריך להישמר לתוצאות בהן לתלמידים יש באמת ובתמים ספקות. למרות שחלק מהתלמידים לא יצליחו לחוות בעצמם את ההוכחות כאתגר אינטלקטואלי, הרי שהם יכולים להבין כיצד אחרים מתייחסים אליהן באופן זה. בנוסף לכך, במתמטיקה, כפי שיוכל להעיד כל בעל ניסיון, התפקיד הטהור של ההוכחה ביצירת שיטתיות עולה רק בשלב מתקדם מאד, ולכן אין להשתמש בו בקורס בסיסי העוסק בהוכחות. דומה שיש טעם להציג בפני התלמידים את התפקידים השונים של ההוכחות, פחות או יותר לפי הסדר בו הוצגו לעיל, אם כי לא באופן ליניארי טהור כפי שנעשה כאן, אלא בגישה ספירלית, בה תפקידים שהוצגו קודם לכן, מוצגים שוב וביתר הרחבה.

מענקי קרן אביטל על יוזמות בהוראת המתמטיקה

בטקס חגיגי חולקו בחודש פברואר 2003 בפעם הראשונה שני פרסים של הקרן לעידוד יוזמות בהוראת המתמטיקה ע"ש ברכה ופרופ' שמואל אביטל. קרן אביטל הוקמה על ידי בני משפחת אביטל בשנת 2002 לזכרו של פרופסור שמואל אביטל אשר היה מחלוצי הוראת המתמטיקה בארץ והקדיש את חייו לטיפוח החינוך המתמטי בארץ. פרופסור אביטל פעל במשך שישים שנה לקידום מורים למתמטיקה ולפיתוח שיטות להגברת האהדה של תלמידים למתמטיקה. הטקס נערך בבניין המחלקה להוראת המדעים בטכניון בחיפה, בנוכחות ראש המחלקה הנוכחי פרופסור מיכאל מור ונציגי משפחת אביטל ומשפחות הזוכים ובהנחיית ראש המחלקה הקודם וחבר וועדת הקרן, פרופ' אורי לירון. בשם המשפחה ברך את מקבלי הפרסים מר יהוא אביטל.

שני הזוכים השנה הציגו את עבודותיהם בפני הקהל. מר משה רייך, מביה"ס מנור בקיבוץ כברי, הציג שיטה המופעלת מזה כשלוש שנים להוראת המתמטיקה לכיתות י-י"א לקבוצות תלמידים המתקשים בלימוד. בשיטתו של מר רייך משולבת חקירה עצמית של תהליכים מתמטיים בניסיונות פיסיקליים שונים. גב' רינה ברקן מבי"ס העל-יסודי במשגב, הציגה יוזמה להוראת מתמטיקה "ברמה של חמישה כוכבים" הכוללת שילוב משחקים, חקירה עצמית של נושאים נבחרים על ידי תלמידים והצגתם כפרויקטים.
חתמה את האירוע הרצאה מרתקת של גב' זיוה שחם, מתלמידותיו של פרופ' אביטל וכיום חברת ועדת קרן אביטל ומנהלת המרכז הארצי למתמטיקה "קשר חם". בהרצאתה סיפרה גב' שחם על חיים בעולמות בעלי פחות משלושה מימדים, כהכנה להפשטה הנדרשת להבנת עולמות בעלי יותר משלושה מימדים.

הקרן מבקשת לנצל אירוע זה לקריאה למורים להציג יוזמות נוספות למועמדות לפרס לשנת תשס"ד. את ההצעות יש לשלוח עד לתאריך 31.11.2003 לכתובת:
קרן אביטל, המחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים, הטכניון, חיפה 32000.
או בדואר אלקטרוני לנציגות הוועדה:
פרופ' ענת רפאלי Anat@Rafaeli.net
גב' זיוה שחם zivas@tx.technion.ac.il

לקבלת מידע על הקרן, ניתן לפנות אל:
מזכירת המחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים בטכניון,
גב' חיה הקר, טלפון: 04-8293102